Junior Mathematical Olympiad - 2011

December 04, 2011

Answer all questions. Give justification to your answer.

Use of calculator (in any form) is not allowed.

ସମସ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ଦିଅ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉତ୍ତରର ଯଥାର୍ଥତା ଲେଖ ।
କାଲ୍‌କୁଲେଟରର ବ୍ୟବହାର ନିଷେଧ ।

Time : 3 hours | Full Marks : 100

Answer all questions

1. A shopkeeper enhances the cost price of an article by 50 % and while selling allows two successive discounts of 20 % and 30 % to the customer. Determine the profit or loss on the article. [5]

   ଜଣେ ଦୋକାନୀ ଗୋଟିଏ ଦ୍ରବ୍ୟର କିଣାମୂଲ୍ୟ ଉପରେ 50 % ବଢ଼ାଇଦିଏ ଏବଂ ବିକିଲାବେଳେ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ 30 % ଓ 20 % ରିହାତି ଦିଏ । ଦ୍ରବ୍ୟଟି ବିକିଲେ କେତେ ଲାଭ ବା କ୍ଷତି ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. There are two containers out of which one contains exactly 16 litres of water and the other contains exactly 9 liters of water. There is no measuring mark on the containers. Using only the two containers determine how to bring 6 litres of water from a pond. [5]

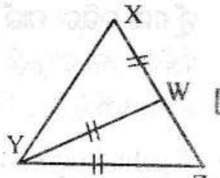
   ଦୁଇଟି ପାତ୍ର ଅଛି । ଗୋଟିଏ ପାତ୍ରରେ ଠିକ୍ 16 ଲିଟର ପାଣି ଧରେ ଓ ଅନ୍ୟଟିରେ ଠିକ୍ 9 ଲିଟର ପାଣି ଧରେ । ଏହି ପାତ୍ର ଦ୍ୱୟରେ କୌଣସି ମାପଚିହ୍ନ ନାହିଁ । ଗୋଟିଏ ପୁଷ୍କରିଣୀରୁ 6 ଲିଟର ପାଣି କେବଳ ଏହି ଦୁଇଟି ପାତ୍ରକୁ ବ୍ୟବହାର କରି କିପରି ଆଣିହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. In a bag there are 13 red, 5 blue, 1 white and 9 green balls. Without looking in to the bag determine the least number of balls that can be drawn such that three of them are of same colour. [5]

   ଗୋଟିଏ ମୁଣିରେ 13 ଟି ଲାଲ, 5 ଟି ନୀଳ, 1 ଟି ଧଳା ଓ 9 ଟି ସବୁଜ ବଲ ଅଛି । ଉକ୍ତ ମୁଣିରୁ ନ ଦେଖିକରି ଅତି କମ୍‌ରେ କେତୋଟି ବଲ ବାହାର କଲେ ଆମେ ନିଶ୍ଚୟ 3 ଟି ସମାନ ରଙ୍ଗର ବଲ ପାଇପାରିବା ।

4. Find for how many positive integers n with $n \le 100$, $n^3 + 5n^2$ is the square of an integer.
   କେତୋଟି ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା n $(n \le 100)$ ପାଇଁ $n^3 + 5n^2$ ଗୋଟିଏ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ହେବ ? [5]

5. In the diagram, $\triangle XYZ$ is isosceles with $XY = XZ$. Also, point W is on XZ so that XW = WY = YZ. Determine the measure of ∠XYW. [5]

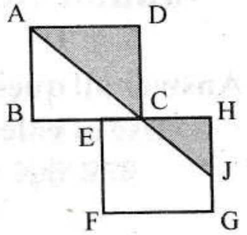
   

   ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\triangle XYZ$ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ । $XY = XZ$. W, XZ ବାହୁ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ଏପରି ବିନ୍ଦୁ ଯେ XW = WY = YZ. ∠XYZର ପରିମାପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. Determine how many positive integers less than 400 can be created using only the digits 1, 2 or 3 with repetition of digits allowed. [5]

   400ରୁ କମ କେତୋଟି ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା କେବଳ 1, 2, ବା 3 ଅଙ୍କକୁ ନେଇ ସମ୍ଭବ ? ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ ଏକାଧିକବାର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇପାରେ ।

7. Squares $ABCD$ and $EFGH$ are equal in area. Vertices B, E, C and H lie on the same straight line. Diagonal AC is extended to J, the mid point of GH. Determine the ratio of the shaded portion of the two suqares. [5]



$ABCD$ ଓ $EFGH$ ଦୁଇଟି ସମାନ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର । B, E, C ଏବଂ H ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ । କର୍ଣ୍ଣ AC କୁ GH ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ J ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବଢ଼ାଇ ଦିଆଯାଇଛି । ଏହି ଦୁଇଟି ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ବର୍ଣ୍ଣିଳ ଖଣ୍ଡଗୁଡ଼ିକର ଅନୁପାତ ସ୍ଥିର କର ।

8. A and B start from two places X and Y respectively, that are 60 K.M. apart. If A and B travel at uniform speed of 80 K.Ms. and 20 K.Ms. per hour respectively, and return back immediately to their respective places after reaching Y and X respectively, then how often and at what distance from X, shall they meet ? [5]

60 କି.ମି. ଦୂରରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସ୍ଥାନ X ଓ Y ରୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B ବାହାରି ପରସ୍ପର ଅଭିମୁଖେ ଯାତ୍ରା କଲେ । A ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 80 କି.ମି. ଏବଂ B ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 20 କି.ମି. ବେଗରେ ଯାଉଥିଲେ । A ଓ B ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ରେ ପହଞ୍ଚିବା ମାତ୍ରକେ ପୂର୍ବ ବେଗରେ ନିଜ ସ୍ଥାନକୁ ଫେରିଆସିଲେ । ସେମାନେ X ଠାରୁ କେତେ ଦୂରରେ ଏବଂ କେତେଥର ବାଟରେ ପରସ୍ପରକୁ ଭେଟିଥିଲେ ?

9. Two numbers a and b with $o \le a \le 1$ and $o \le b \le 1$ are chosen at random. The number c is defined by $c = 2a + 2b$. The numbers a, b and c are each rounded to the nearest integer to give A, B and C, respectively (For example, if $a = 0.432$ and $b = 0.5$, then $c = 1.864$, and so $A = o$, $B = 1$ and $C = 2$). What is the probability that $2A + 2B = C$? [5]

a ଓ b ଦୁଇଟି ଏପରି ଅଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ଯାହାର ମୂଲ୍ୟ 1 ଠାରୁ ଅଧିକ ନୁହେଁ । ଅର୍ଥାତ୍, $o \le a \le 1$ ଏବଂ $o \le b \le 1$. ଯଦି $2a + 2b = c$ ହୁଏ ଏବଂ a, b, c ର ସନ୍ନିକଟ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଯଥାକ୍ରମେ A, B, ଏବଂ C ହୁଏ (ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଯଦି $a = 0.432$, $b = 0.5$ ଓ $c = 1.864$ ହୁଏ ତାହେଲେ $A = o$, $B = 1$ ଏବଂ $C = 2$) ତାହେଲେ $2A + 2B = C$ ର ସମ୍ଭାବନା କେତେ ?

10. I bought a new plant for my garden Anika said it was a red rose, Bill said it was a purple daisy and Cathy said it was a red dahlia. Each person was correct in stating either the colour or the type of plant what was the plant that I brought ? [5]

ମୁଁ ମୋ ବଗିଚା ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ଚାରା କିଣିଲି । ଅନିକା କହିଲା ଏହି ଚାରାଟି ହେଉଛି ଲାଲ ଗୋଲାପର । ବିଲ କହିଲା ଏହା ବାଇଗଣି ଡେଜିର ଚାରା । କ୍ୟାଥି କହିଲା ଏହା ହେଉଛି ଲାଲ ଡାଲିହା । ପ୍ରତ୍ୟେକେ ରଙ୍ଗ ବା ଚାରାର କିସମ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଠିକ୍ କହୁଥିଲେ । ତାହେଲେ କେଉଁ ପ୍ରକାରର ଚାରା ମୁଁ କିଣିଥିଲି ?

11. A palindrome is a positive integer that is the same when read forwards or backwards. For example, 545 and 1331 are both palindromes. Find the difference between the smallest three digit palindrome and the largest three digit palindrome. [3]

ପାଲିଣ୍ଡ୍ରୋମ୍ ଏକ ଏପରି ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ଆଗରୁ ପଢ଼ିଲେ ଯାହା ପଛରୁ ପଢ଼ିଲେ ତାହା । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, 545 ଏବଂ 1331 ଉଭୟ ହେଉଛନ୍ତି ପାଲିଣ୍ଡ୍ରୋମ୍ । ତିନିଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସର୍ବନିମ୍ନ ଓ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ପାଲିଣ୍ଡ୍ରୋମ୍ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. For which positive integral value of m, $\dfrac{1}{2m^2 + 15}$ will be closest to 0.01 ? [3]

m ର କେଉଁ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ $\dfrac{1}{2m^2 + 15}$ ର ମୂଲ୍ୟ ୦.୦୧ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବ ?

13. In the addition of the three-digit numbers shown, the letters A, B, C, D and E each represent a single digit.

$$\begin{array}{r} A\,B\,E \\ A\,C\,E \\ +\,A\,D\,E \\ \hline 2\,0\,1\,1 \end{array}$$

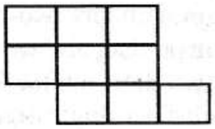
Find the value of $A + B + C + D + E$. [5]

A, B, C, D ଏବଂ E ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଓ

$$\begin{array}{r} A\,B\,E \\ A\,C\,E \\ +\,A\,D\,E \\ \hline 2\,0\,1\,1 \end{array}$$

ତାହେଲେ $A + B + C + D + E$ କେତେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

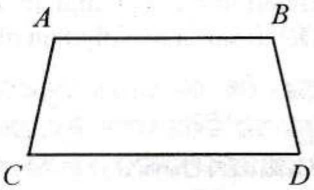
14. From the figure shown, three of the nine squares are to be selected. Each of the three selected squares must share a side with at least one of the other two selected squares. Find in how many ways this can be done ? [5]



ଦର୍ଶାଯାଇଥିବା ଚିତ୍ରରୁ ନଅଟି ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ମଧ୍ୟରୁ ଏପରି ତିନୋଟି ବଛାଯାଉ ଯେପରିକି ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ ବାହୁ ଅବଶିଷ୍ଟ ଦୁଇ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ମଧ୍ୟରୁ ଅନ୍ତତଃ ଗୋଟିଏ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ସହ ସାଧାରଣ ହୋଇଥିବ । କେତେ ଉପାୟରେ ଏହା କରାଯାଇପାରିବ ?

15. In the trapezium ABCD (see figure) AC = BD. Show that AD = BC. [5]

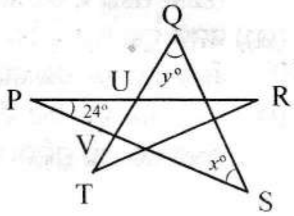
ABCD ଟ୍ରାପିଜିଅମରେ AC = BD. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AD = BC.



16. Let n be the largest integer for which $14\,n$ has exactly 100 digits. Counting from right to left, find the 68th digit of n. [5]

ମନେ କରାଯାଉ n ଏକ ଏପରି ସର୍ବବୃହତ୍ତର ସଂଖ୍ୟା ଯେ $14\,n$ ଏକ 100 ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା । ଯଦି ଅଙ୍କର ସ୍ଥାନକୁ ଆମେ ଡାହାଣରୁ ବାମଆଡ଼କୁ ଗଣିବା ଆରମ୍ଭ କରୁ ତାହେଲେ ସଂଖ୍ୟା n ରେ 68 ତମ ଅଙ୍କଟି କ'ଣ ?

17. In the diagram, PR, PS, QS, QT and RT are straight line segments. QT intersects PR and PS at U and V, respectively. If $PU = PV$, $\angle UPV = 24°$, $\angle PSQ = x°$ and $\angle TQS = y°$, find the value of $x+y$. [5]



ଚିତ୍ରରେ PR, PS, QS, QT ଏବଂ RT ହେଉଛନ୍ତି ସରଳ ରେଖାଖଣ୍ଡ । QT, PR ଏବଂ PS କୁ ବିନ୍ଦୁ U ଏବଂ V ରେ ଯଥାକ୍ରମେ ଛେଦ କରୁଛି । ଯଦି $PU = PV$, $\angle UPV = 24°$, $\angle PSQ = x°$ ଏବଂ $\angle TQS = y°$, ତାହେଲେ $x+y$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

18. John lists the integers from 1 to 20 in increasing order. He then erases the first half of the integers in the list and rewrites them in order at the end of the second half of the list. Find the integer in the new list which has exactly 12 integers to its left. [5]

1 ରୁ 20 ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାକୁ ଜନ୍ ବର୍ଦ୍ଧିଷ୍ଣୁ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଏକ ତାଲିକା ପ୍ରସ୍ତୁତ କଲେ । ତାଲିକାର ପ୍ରଥମ ଅର୍ଦ୍ଧେକକୁ ଲିଭାଇଦେଇ, ତାହାକୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଦ୍ଧେକ ପରେ ପୁନର୍ବାର ସେହି କ୍ରମରେ ଲେଖିଲେ । ନୂତନ ପ୍ରସ୍ତୁତ ତାଲିକାରେ ସେହି ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ବାମପଟେ ଠିକ୍ 12 ଟି ସଂଖ୍ୟା ଥିବ ।

19. A swimmer is swimming up a river against the curent. Next to bridge A he loses an empty water bottle. Twenty minutes later he notices the loss and turns around. He finds the water bottle by bridge B. Knowing that the distance between two bridges is 2 K.M. how fast is the river flowing ? [4]

ଜଣେ ସନ୍ତରଣକାରୀ ନଦୀର ସ୍ରୋତର ପ୍ରତିକୂଳରେ ପହଁରୁଥିବା ସମୟରେ A ପୋଲ ପାଖରେ ତାଙ୍କର ଖାଲି ପାଣି ବୋତଲଟି ଭାସିଗଲା । 20 ମିନିଟ୍ ପରେ ସେ ବୋତଲ ଭାସିଯିବା କଥା ଜାଣିବା ପରେ ତାକୁ ଧରିବା ନିମନ୍ତେ ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ ବୁଲିପଡ଼ି ସ୍ରୋତର ଅନୁକୂଳରେ ପହଁରି ପହଁରି ଯାଇ B ପୋଲ ପାଖରେ ବୋତଲଟିକୁ ଧରିଲେ । A ଓ B ପୋଲ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତ୍ୱ 2 କି.ମି. । ନଦୀର ସ୍ରୋତର ବେଗ କେତେ ?

20. Begin with any two-digit positive integers and multiply the two digits together. If the result product in a two-digit number, then repeat the process. When this process is repeated, all two digit numbers will eventually become a single digit number. Once a product results in a single digit, the process stops.
   (a) Beginning with the number 68, determine the number of steps required for the process to stop.
   (b) Determine all two-digit numbers for which the process stops at 8 after 2 steps.
   (c) Determine all two digit numbers for which the process stops at 4.
   (d) Determine a two digit number for which the process stops after 4 steps. [10]

ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ନିଅ ଏବଂ ଏହାର ଦୁଇଟି ଅଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ବାହାର କର । ଯଦି ଏହା ପୁଣି ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତାହେଲେ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ପୁଣିଥରେ ପ୍ରୟୋଗ କର । ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟା ସେହି ସମୟ ଯାଏ ଅବ୍ୟାହତ ରଖାଯାଉ ଯେତେବେଳେ ଯାଏ ଗୁଣନଫଳ ଏକ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ନ ହୋଇଯାଇଛି । ଏହି ଏକ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ବାହାରିଲେ ପ୍ରକ୍ରିୟା ବନ୍ଦ ହେବ ।

(କ) ଯଦି ସଂଖ୍ୟା 68 କୁ ନେଇ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ଦୋହରାଯାଏ—ତାହେଲେ କେତୋଟି ପାହାଚ ପରେ ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟା ବନ୍ଦ ହେବ ?

(ଖ) ସମସ୍ତ ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହା ଉପରେ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ ମାତ୍ର 2ଟି ପାହାଚ ପରେ ସଂଖ୍ୟା 8ରେ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ବନ୍ଦ ହେବ ।

(ଗ) ସମସ୍ତ ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର—ଯାହା ଉପରେ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପ୍ରୟୋଗ କଲେ ସଂଖ୍ୟା 4 ରେ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ବନ୍ଦ ହେବ ।

(ଘ) ଏକ ଏପରି ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯାହା ଉପରେ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପ୍ରୟୋଗ କଲେ 4ଟି ପାହାଚରେ ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟା ବନ୍ଦ ହେବ ।

•